

非传统磁悬浮动力学及稳定性研究

陈劲羽¹⁾ 范明君¹⁾ 季涌泉¹⁾ 李 隆¹⁾ 马驰川¹⁾

¹⁾(北京市十一学校 国际部, 北京市)

摘要 本文旨在通过物理理论和实验，研究在一大一小的两块磁铁，分别位于非磁性导体板上方和下方时，下方较小磁铁的旋转运动可引发上方较大盘状磁铁的悬浮现象。磁铁在稳定悬浮时呈现进动，并能够观察到稳定的章动角和悬浮高度。本文通过对磁铁的动力学模型简化给出了平衡状态下的描述，通过对有效势能进行理论分析，验证了稳定的悬浮高度和章动角的存在；通过自研实验装置改善了磁悬浮实验的可靠性和精度，并获得了可有效验证理论模型的数据。研究结果证明，悬浮磁铁的运动特征主要受到下方旋转磁铁转速的影响，非磁性导体板产生的涡流阻尼效应可以增强其悬浮的稳定性。最终，本文指出磁悬浮现象的物理本质是磁铁排斥力与陀螺进动的结合。这一结论有助于补充和完善磁铁相对运动的相关理论，同时为磁悬浮技术应用提供崭新思路。

关键词 磁悬浮；陀螺效应；涡流阻尼效应

Dynamics and Stability of Nontrivial Inter-Magnetic Levitation

Jin-Yu Chen¹⁾ Ming-Jun Fan¹⁾ Yong-Quan Ji¹⁾ Long Li¹⁾ Chi-Chuan Ma¹⁾

¹⁾(International Department, Beijing National Day School, Beijing, China)

Abstract This article aims to investigate the dynamics and stability of a magnetic levitation system in which the rotation of a smaller magnet, placed beneath a non-magnetic conductive plate, induces the levitation of a larger, disk-shaped magnet above the plate. The disk magnet, when steadily levitated, exhibits steady precession, maintaining a consistent precession angle and elevation. By simplifying the dynamic model of the magnets, this study describes the system's equilibrium state. The stability of levitation height and precession angle is verified by an analysis of effective potential energy. Through exclusively built experimental apparatuses, the reliability and accuracy of the experiment are enhanced and data validating the theoretic model is attained. The results of experiments affirm that the motion characteristic of levitating magnet depends on the revolving rate of the beneath cubic magnet, and the damping effect generated by eddy current of non-magnetic conductive plate stabilizes this motion. Ultimately, this article identifies the physical essence of nontrivial magnetic levitation as a combination of gyroscopic effects and magnetic repulsion force. This conclusion enriches theories of magnet interaction, and offers technical application of magnetic levitation with a novel perspective.

Key words Magnetic Levitation; Gyroscopic Effects; Eddy Current Damping

目录

1 引言	4
1.1 简介	4
1.1.1 研究背景	4
1.1.2 实验复现和现象概述	4
2 一期实验	4
2.1 实验设计	4
2.1.1 实验装置	4
2.1.2 实验分析	4
2.2 实验现象	6
2.3 符号约定	6
2.4 研究目标	6
3 理论分析	7
3.1 物理模型简化	7
3.1.1 稳定态分析	7
3.1.2 自由度约化	7
3.2 理论模型建立	7
3.2.1 磁偶极子建模	7
3.2.2 稳定态运动方程	8
3.2.3 完整运动学分析	11
3.2.4 拉格朗日方程数值模拟	11
3.3 有效势能分析	12
3.3.1 磁铁非对称性理论修正	13
3.3.2 悬浮高度稳定性分析	14
3.3.3 章动角稳定性分析	14
4 二期实验设计和分析	16
4.1 磁矩测定	16
4.1.1 动态磁场强度测量系统	16
4.1.2 磁场数据分析	16
4.2 磁悬浮实验装置	19
4.2.1 无刷电机闭环测控系统	19
4.3 转子转速与浮子进动速度同步性验证	21
4.3.1 相位和速度同步性实验	21
4.4 悬浮高度测定	22
4.4.1 基于菲涅尔透镜的悬浮高度光学测量	22
4.4.2 悬浮高度数据分析	22
4.5 章动角测定	23
4.5.1 基于激光的章动角测量系统	23
4.5.2 章动角分析	23
4.6 $x - y$ 平面运动测定	25
4.6.1 基于高速影像图像分析的 $x - y$ 平面运动测定	25

4.6.2 数据分析	25
4.7 涡流效应	26
4.7.1 实验装置	26
4.7.2 实验结果分析	26
4.8 定性解释和物理本质阐释	27
5 结论与展望	28
5.1 研究结论	28
5.2 未来展望	28

1 引言

1.1 简介

磁悬浮问题是 2024 年青年物理学家锦标赛 (International Young Physicists' Tournament, IYPT) 题目之一，题目给出了在一大一小的两块磁铁，分别位于非磁性导体板上方和下方时，下方较小磁铁的运动可引发上方较大盘状磁铁的悬浮的情景。我们基于这一情景拓展延伸，对该种非传统磁悬浮的实现及其原理进行了广泛而深入的研究。

1.1.1 研究背景

根据恩绍定理 (Earnshaw's Theorem)，在仅有两块磁铁组成的系统中，由于磁铁排斥力的不稳定性，在下方磁铁静止时，上方磁铁无法稳定悬浮。然而，近期研究发现，当其中一枚磁铁放置在非磁性导体物质上时（如铜、铝金属），上方磁铁的旋转运动可以导致下方磁铁的稳定悬浮^[1]。

1.1.2 实验复现和现象概述

为验证上述研究成果的适用性，我们对其进行了实验室复现。我们使用手持电动打磨器固定边长为 5mm 的小正方体磁铁，使其南北极方向垂直于转轴。将边长为 10mm 的较大的正方体磁铁南北极方向朝上放置于高度为 150mm，半径为 80mm 的实心铝质圆柱体上。在电机驱动的旋转小磁铁以一定速度旋转时，大磁铁可以短暂离开表面，产生自旋，并且可以根据旋转小磁铁的位置改变姿态。然而，当电机驱动的旋转磁铁逐渐改变角度至悬浮磁铁下方时，悬浮磁铁即掉落。同时，当旋转小磁铁将悬浮磁铁拉升过高时，悬浮磁铁亦掉落。我们推断，铝块的涡流提供的阻尼在磁铁成功悬浮中具有关键作用，且其涡流强度随距离衰减较大。

2 一期实验

基于上述研究中上方磁铁的旋转导致下方磁铁的悬浮现象，为更好符合题目中下方较小磁铁的运动引发上方较大盘状磁铁的悬浮的题设，我们在一期实验阶段搭建了能使上方磁铁悬浮时非磁性导体板位于旋转磁铁和悬浮磁铁之间的实验设备进行研究。

2.1 实验设计

2.1.1 实验装置

在由 2020 型号、2040 型号铝型材构造的坚硬框架中，795 型号直流碳刷电机固定在可利用 8mm 精密丝杠调节垂直高度的水平臂上，其上下通过滚珠轴承和推力轴承嵌入 3D 打印底座与框架固定。两块厚度为 5mm，边长为 200mm 的正方形铜板堆叠固定在装置顶端。装置的旋转磁铁模组由边长 20mm，南北极水平放置的正方体磁铁通过 3D 打印的连接器固定在电机转轴上，并可通过直流稳压电源调整电压精确调整转速。实验装置设计如图 1、图 2 所示，建模使用 Autodesk Fusion，3D 打印零件使用 Anycubic Chiron 和 Bambulab X1C 3D 打印机。

如图 3 所示，三台具有高速影像功能的数字摄像装置分别以旋转磁铁、悬浮磁铁侧面及其上方三个视角捕捉旋转磁铁转速、悬浮磁铁竖直方向和水平方向运动的信息，并经由 Tracker，Adobe Premiere Pro 等软件解析视频信息并得到相关数据。

2.1.2 实验分析

在悬浮磁铁的表面标记中心位置和边缘位置作为标记点，在铜板表面垂直固定刻度尺作为比例尺，并在电机转轴处做标记。将浮子放置在铜板上，启动电机，从较高电压逐渐减小电压以降低电机转速。随着转速的降低，浮子会先后经历在铜板上跳动、稳定悬浮，以及脱离悬浮位置并掉落三个阶段，记录浮子浮起以及掉落的临界电压从而确定每一枚磁铁的悬浮区间。在稳定悬浮区间，分段改变电压，观察现象。

经由 Tracker，Adobe Premiere Pro 等软件分析，通过俯视图测定并跟踪浮子在铜板上方的 $x - y$ 方向平动及其进动和自旋；通过分析侧视图，测定悬浮高度、章动角；通过转子视图测定电机转轴旋转一周所需帧数，获得转子转速。

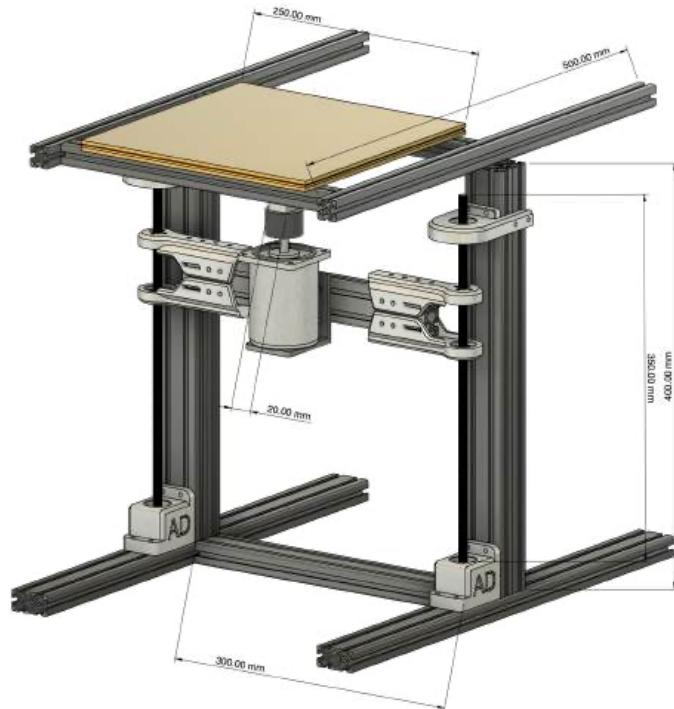


图 1 一期实验阶段实验装置设计图纸

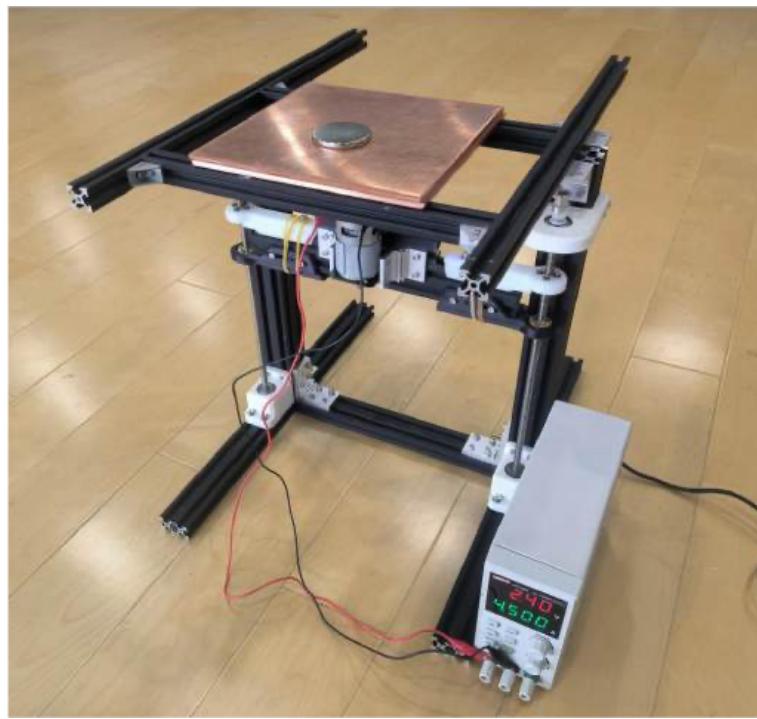
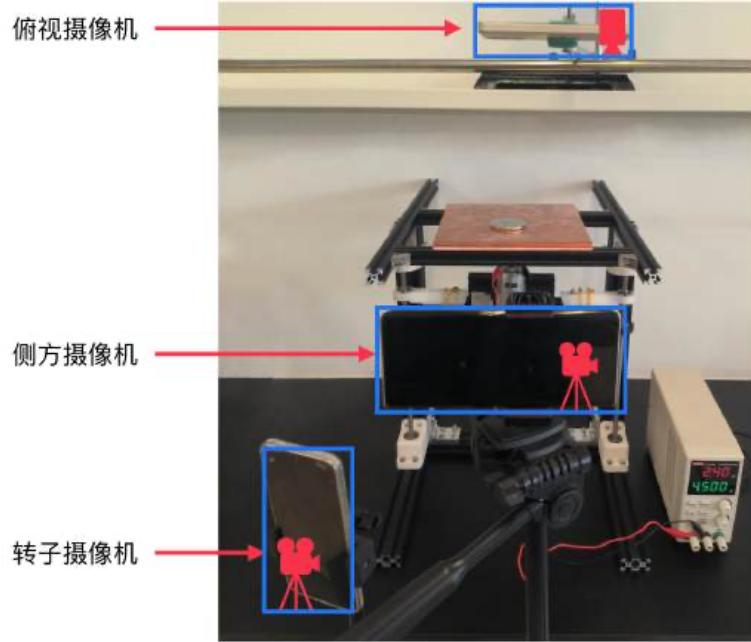


图 2 实验装置搭建实物

图 3 机位设置



2.2 实验现象

根据实验观察，悬浮磁铁（下称浮子）在不同的旋转磁铁（下称转子）转速下在空间位置上以及运动形态上有所不同，并且在悬浮的过程中也同时进行章动、进动，以及在 $x - y$ 方向上的平动。在实验中，浮子稳定悬浮时具有稳定的悬浮高度和章动角度，并伴有水平方向小幅度周期性运动和自旋。实验发现浮子悬浮高度和章动角度随下方转子旋转速度的变化有明显关联性。而其他因素如水平运动和浮子自旋则未随转子速度变化有明显响应，且未明显影响悬浮状态及其稳定性。浮子的稳定悬浮对转子转速有较高要求，过低的转速或过高的转速均不能使其稳定悬浮。

2.3 符号约定

参见图4和表1。

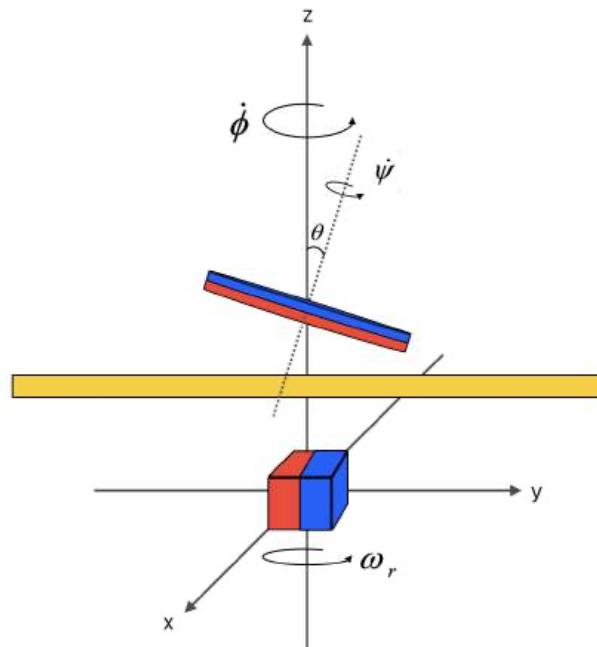
表 1 符号约定

物理量	符号	单位
浮子质心位置	x, y, z	mm
浮子进动角	ϕ	rad
浮子章动角	θ	rad
浮子自旋角	ψ	rad
浮子径向旋转转动惯量	I_r	$kg \cdot m^2$
浮子轴向旋转转动惯量	I_a	$kg \cdot m^2$
浮子磁矩	m_f	$A \cdot m^2$
转子磁矩	m_r	$A \cdot m^2$
转子转速	ω_r	rad/s

2.4 研究目标

根据一期实验阶段显示出的物理物理现象，本研究将重点聚焦在转子转速对悬浮高度及章动角度的影响上，并研究转子速度与浮子 $x - y$ 运动、进动速度 ϕ 和浮子自旋速度 ψ 的相关性，以及磁铁本身形态等性质对其运动和稳定性的影响。

图4 符号约定



3 理论分析

3.1 物理模型简化

3.1.1 稳定态分析

相较于非稳定暂态，稳定状态的分析更为简单，且有助于以较清晰的方式解释其物理本质。通过对实验的细致观察，可以发现，在浮子 6 个自由度中，浮子在 $x - y$ 平面上的位移 x, y 较小且较有规律，悬浮高度 z 较为稳定，章动角 θ 较为稳定，浮子进动角速度与转子转速基本同步。为进一步简化问题，我们对自由度进行限制和约化。

3.1.2 自由度约化

因为浮子在 $x - y$ 平面上的位移较小，有

$$x, y \ll z$$

则规定

$$x, y \equiv 0$$

当浮子稳定进动时，其进动角速度与转子转速大致吻合，可以转换为人为精确控制的自变量，即

$$\dot{\phi} = \omega_r$$

如此，对磁悬浮模型建模的重点在章动角 θ 和悬浮高度 z 两个自由度上。

3.2 理论模型建立

3.2.1 磁偶极子建模

将上下两磁铁视为磁偶极子，实验证明，磁场和磁矩方向如图5所示，该状态的实验证见4.3小节。磁场计算公式根据毕奥-萨伐尔定理（Biot-Savart Law）可表示为^[1]

$$\mathbf{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_r)\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}_r] \quad (1)$$

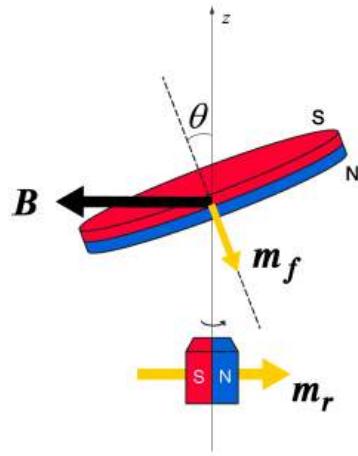


图 5 磁场和磁矩方向示意图

3.2.2 稳定态运动方程

由于浮子进动和转子转动同步，则浮子磁铁受到的磁力矩可表示为

$$|\tau| = |\mathbf{m}_f \times \mathbf{B}| \quad (2)$$

力矩方向垂直纸面向内。其中， \mathbf{B} 为转子在浮子质心处的磁感应强度，结合(1)式、(2)式得

$$|\tau| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_r m_f}{z^3} \cos \theta \quad (3)$$

μ_0 为真空磁导率。为便于计算，我们记

$$M = \frac{\mu_0 m_r m_f}{4\pi} \quad (4)$$

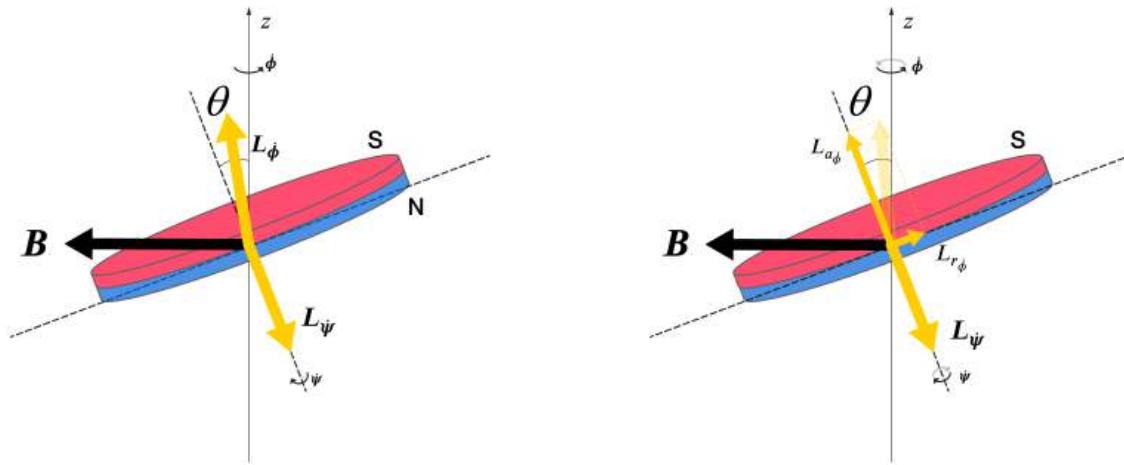
则(3)式可改写为

$$|\tau| = \frac{M}{z^3} \cos \theta \quad (5)$$

由于转轴经过浮子磁铁质心，重力矩为 0，对浮子磁铁用角动量定理有

$$|\tau| = \left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| \quad (6)$$

由于浮子磁铁在悬浮时呈现伴有自旋的进动，如图6将进动速度沿磁铁径向和轴向分解并分别计算角动量。则浮子径向角动量为



(a) 角动量方向示意图

(b) 角动量沿轴径向分解示意图

图 6 浮子角动量示意图

$$L_r = L_{r\dot{\phi}} = I_r \dot{\phi} \sin \theta \quad (7)$$

浮子轴向角动量需考虑浮子自旋的贡献，为

$$L_a = L_{a\dot{\phi}} + L_\psi = I_a \dot{\phi} \cos \theta + I_a \dot{\psi} \quad (8)$$

根据3.2.3节中拉格朗日方程(33)式，有

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = 0 \quad (9)$$

根据实验观察，浮子自旋方向与其进动方向相反，结合(8)式、(9)式，有

$$L_a = L_{a\dot{\phi}} + L_\psi = 0 \quad (10)$$

浮子角动量即为

$$\mathbf{L} = I_r \dot{\phi} \sin \theta \quad (11)$$

结合(6)式，则力矩可表示为

$$|\tau| = |\dot{\phi} \times \mathbf{L}| = I_r \omega_r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (12)$$

力矩方向垂直纸面向内。与(3)式联立得

$$\frac{M}{z^3} \cos \theta = I_r \omega_r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (13)$$

移项得

$$\sin \theta = \frac{M}{I_r \omega_r^2 z^3} \quad (14)$$

磁铁在竖直方向受到磁斥力和重力。磁斥力 $F_{repulsion}$ 为保守力，可表达为^[2]

$$F_{repulsion} = -\frac{dU_{mag}}{dz} \quad (15)$$

其中， U_{mag} 为磁相互作用势能，则有

$$U_{mag} = -\mathbf{m}_f \cdot \mathbf{B} \quad (16)$$

将(1)式代入可得

$$U_{mag} = \frac{\mu_0 m_f m_r}{4\pi z^3} \sin \theta \quad (17)$$

将(4)式代入可得

$$U_{mag} = \frac{M}{z^3} \sin \theta \quad (18)$$

将结果代入(15)式，即对 z 求一阶导数可得

$$F_{repulsion} = \frac{3M \sin \theta}{z^4} \quad (19)$$

其合外力 F_{ext} 可表示为

$$F_{ext} = F_{repulsion} - mg \quad (20)$$

即

$$F_{ext} = \frac{3M \sin \theta}{z^4} - mg \quad (21)$$

将(14)式中平衡状态下 $\sin \theta$ 与 ω_r , z 的关系代入得

$$F_{ext} = \frac{3M^2}{I_r \omega_r^2 z^7} - mg \quad (22)$$

由于浮子磁铁静止

$$F_{ext} = 0 \quad (23)$$

可得

$$z = \left[\frac{3M^2}{mg I_r \omega_r^2} \right]^{\frac{1}{7}} \quad (24)$$

将 z 代入(14)式，则(14)式可改写为

$$\sin \theta = \left[\frac{M m^2 g^2}{27 I_r^4 \omega_r^8} \right]^{\frac{1}{7}} \quad (25)$$

(24)式、(25)式分别描述了稳态下转子转速对悬浮高度及章动角度的影响。

3.2.3 完整运动学分析

拉格朗日方程是求解全自由度完整运动的绝佳手段。根据上述建模，对转子计算拉格朗日量。其中平动动能

$$E_{trans} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (26)$$

转动动能可分为径向和轴向，其中径向转动动能

$$E_{rot_r} = \frac{1}{2}I_r [\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \sin \theta)^2] \quad (27)$$

轴向转动动能

$$E_{rot_a} = \frac{1}{2}I_a(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (28)$$

磁势能

$$U_m = -\mathbf{B}_{m_r} \cdot \mathbf{m}_f \quad (29)$$

重力势能

$$U_g = mgz \quad (30)$$

拉格朗日量 L 可表示为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I_r [\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \sin \theta)^2] + \frac{1}{2}I_a(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + \mathbf{B}_{m_r} \cdot \mathbf{m}_f - mgz \quad (31)$$

根据 2.4 节的实验结果，可以认为涡流产生的阻尼力正比于其运动速度，定义 λ, α, β 为阻尼力系数，则拉格朗日方程可表示为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}(t)} - \frac{\partial L}{\partial \theta(t)} &= -\lambda \dot{\theta}(t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(t)} - \frac{\partial L}{\partial \phi(t)} &= -\lambda \dot{\phi}(t) \sin^2 \phi \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(t)} - \frac{\partial L}{\partial \psi(t)} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} - \frac{\partial L}{\partial x(t)} &= -\alpha \dot{x}(t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}(t)} - \frac{\partial L}{\partial y(t)} &= -\alpha \dot{y}(t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} - \frac{\partial L}{\partial z(t)} &= -\beta \dot{z}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

其中，关于 ψ 的拉格朗日方程可以化为

$$\frac{d(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})}{dt} = 0 \quad (33)$$

3.2.4 拉格朗日方程数值模拟

根据上述理论建模进行数值模拟，浮子的 $x - y$ 平面运动如图7(a)所示；浮子的 $x - y$ 平面运动随时间变化如图7(b)所示；浮子的理论自旋速度 $\dot{\psi}$ 、理论进动速度 ω_r 、理论章动角 θ 如图8-图10所示，我们将在实验部分对上述建模和模拟进行验证。

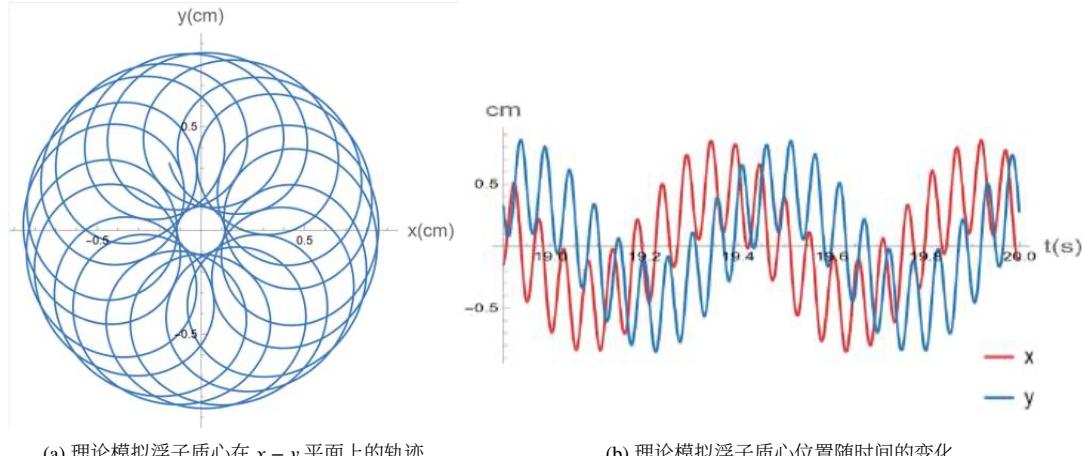


图 7 理论模拟浮子质心轨迹

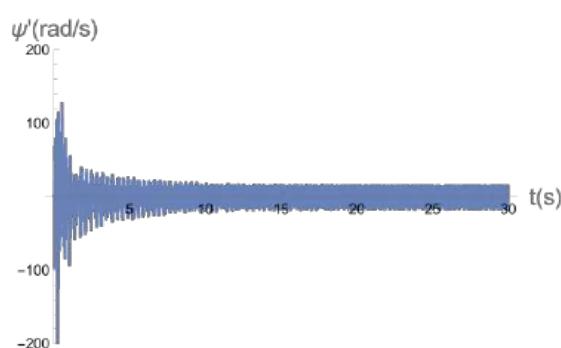


图 8 理论模拟自旋角速度

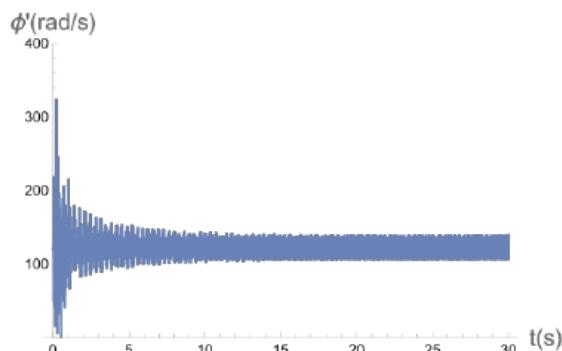


图 9 理论模拟进动角速度

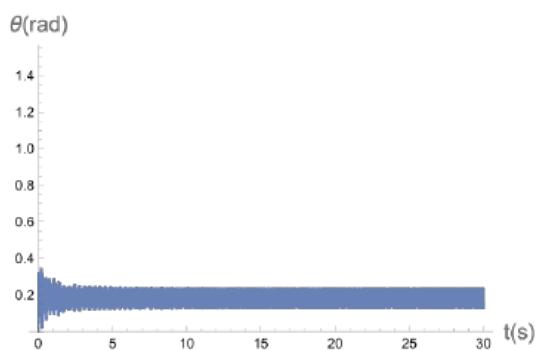


图 10 理论模拟章动角

3.3 有效势能分析

稳定悬浮磁铁具有重力势能和磁相互作用势能，现对其有效势能进行分析。

3.3.1 磁铁非对称性理论修正

由于磁铁并非完美磁偶极子，磁铁几何中心和磁偶极子中心并不完全重合，在浮子悬浮的高度的竖直方向上能够探测到一较小的向下磁场 \mathbf{B}_z ，该磁场磁感应强度相较于水平方向磁场 \mathbf{B}_{xy} 小一个数量级，如图11所示。则该方向的磁场对力矩的贡献为

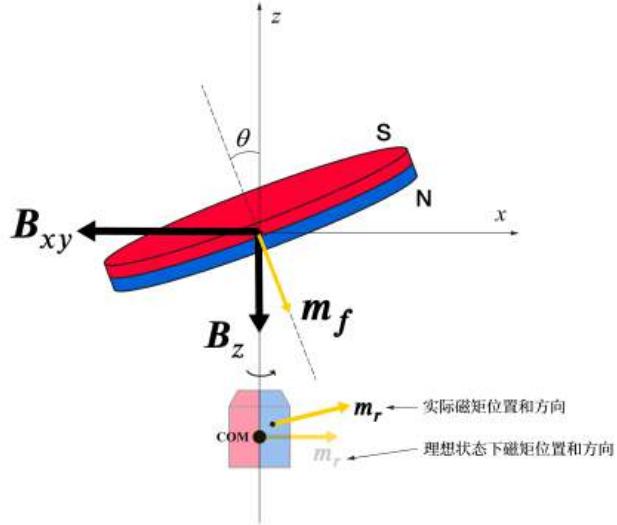


图 11 磁铁非对称性理论修正后的磁场方向示意图

$$|\tau| = |\mathbf{m}_f \times \mathbf{B}_z| = m_f B_z \sin \theta \quad (34)$$

可以看出，相较于水平方向，由于 θ 较小， $\sin \theta$ 比 $\cos \theta$ 小一个数量级，且竖直方向磁场本身较水平方向小一个数量级，综合来看，竖直方向磁场对力矩的贡献可以忽略不计。

然而，在接下来进行有效势能的计算中，竖直方向磁场合有的磁相互作用势能可表示为

$$U_z = -\mathbf{m}_f \cdot \mathbf{B}_z = -m_f B_z \cos \theta \quad (35)$$

而水平方向磁场的磁势能为

$$U_{xy} = -\mathbf{m}_f \cdot \mathbf{B}_{xy} = m_f B_{xy} \sin \theta \quad (36)$$

因为 $\sin \theta$ 比 $\cos \theta$ 小一个数量级，而水平方向磁场较竖直方向大一个数量级，两者符号相反，在有效势能计算中，竖直方向磁场的贡献不可被忽略。

3.3.2 悬浮高度稳定性分析

根据拉格朗日方程，有效势能可表示为

$$U_{eff}(z, \theta) = -\frac{I_r \omega_r^2 \sin^2 \theta}{2} + \frac{M \sin \theta}{z^3} - m_f B_z \cos \theta + mgz \quad (37)$$

由于 θ 较小，对 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 用小角近似有

$$U_{eff}(z, \theta) = -\frac{I_r \omega_r^2 \theta^2}{2} + \frac{M \theta}{z^3} - m_f B_z(1 - \frac{\theta^2}{2}) + mgz \quad (38)$$

可以看出，在 ω_r 使 θ 达到平衡状态时，两者关系可由 (25) 式给出，将 z 作为自变量，在不同转速下，给出势能图像如图12所示。

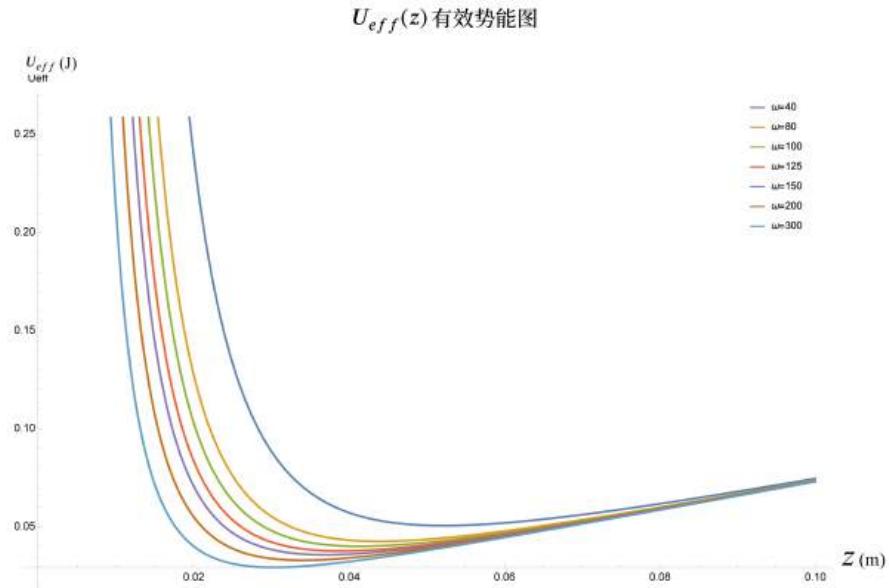


图 12 关于悬浮高度 z 势能图

分析图像可以看出，图像前半段特征主要由磁相互作用势能贡献，在到达一定距离后，图像特征主要由重力势能贡献。由两种势能耦合产生的势能低谷即为该转速下的稳定平衡悬浮高度。可以发现，该势能图像呈现下凸状态，即在竖直方向上存在稳定平衡的悬浮高度，该稳定悬浮高度随转速的增加而降低，且势能低谷更加明显。可以给出如下结论：

1. 低转速下悬浮势能低谷不明显，导致悬浮不稳定。
2. 高转速下势能低谷出现的高度显著降低，浮子与铜板接触而无法悬浮。
3. 适宜转速下既能保证一定的悬浮高度，也能在该处呈现较为明显的势能低谷，因此浮子得以稳定悬浮。

3.3.3 章动角稳定性分析

若考虑章动角的稳定性，在 ω 使 z 达到平衡状态时，两者关系可由 (24) 式给出，将 θ 作为自变量，在不同转速下，给出势能图像如图13所示。可以发现，在实验证明浮子磁铁可以悬浮的转速范围内，势能图像呈现下凸状，存在稳定平衡的章动角，而图像下凸之性质主要由竖直方向磁场产生的磁势能贡献。同时，当转速过高时，势能图像呈现上凸状，但此时浮子已经因悬浮高度过低接触铜版而不能悬浮，因此并无实际意义。

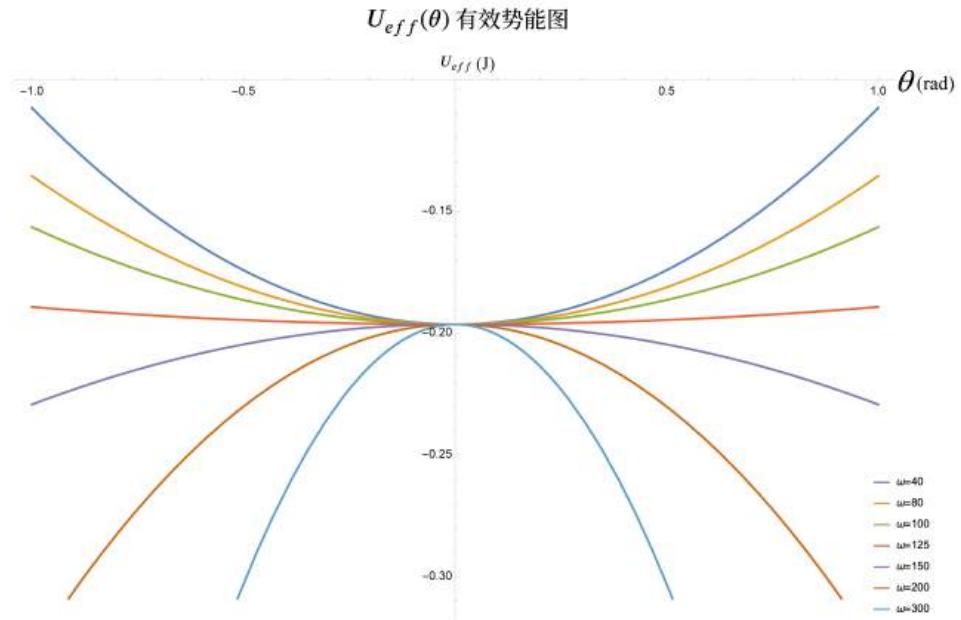


图 13 关于章动角 θ 势能图

4 二期实验设计和分析

实验中使用的转子磁铁为边长为 20mm 的磁正方体，为确保数据的可重复性，所有实验中均测试了两种不同规格的浮子磁铁，分别为直径 40mm 和 50mm，厚度为 5mm 的盘状磁铁（南北极位于磁铁两面）。对于理论建模中的转子转速 ω 与章动角 θ 、悬浮高度 z 和 $x - y$ 平动的关系进行了定量分析和定性解释，同时测量了磁铁的相关参数和铜板的涡流阻尼现象。

表 2 磁铁测试组

测试组 单位	质量 kg	直径 mm	厚度 mm
中号浮子	0.0475	40	5
大号浮子	0.0746	50	5
转子	0.05	-	20*20*20

4.1 磁矩测定

磁矩测定的准确性直接影响到理论模拟的精度，因此具有显著重要性。

4.1.1 动态磁场强度测量系统

通过测量磁铁轴向和径向的磁场随距离的变化，与磁偶极子建模中(1)式进行比对。实验测量磁铁径向和轴向的距离 z (单位 m) 和磁感应强度 B (单位 T) 关系。

首先测量磁体轴向磁矩。实验装置采用 PASCO PASPORT 高精度磁感应强度计和距离传感器，将待测磁铁竖直放置，中心对准磁感应强度计并固定在滑轨上，匀速移动磁铁靠近磁感应强度计，实验装置自动以 20Hz 记录磁铁到传感器的轴向距离和对应磁感应强度。实验装置示意图如图14(a) 所示。

然后测量磁体径向磁矩。将待测磁铁水平放置对准磁感应强度计并固定在滑轨上，其他操作均与测量轴向磁感应强度相同。实验装置示意图如图14(b) 所示。实验装置实物图如图15所示。

4.1.2 磁场数据分析

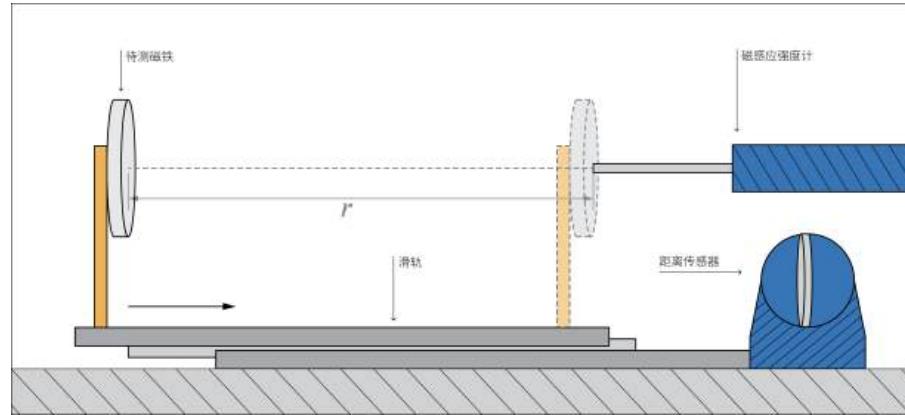
经过多组实验，图16给出了其中一组磁感应强度随距离变化的实验数据。根据理论模型(1)式，有

$$B = \frac{\mu_0 m_r}{2\pi z^3} \quad (39)$$

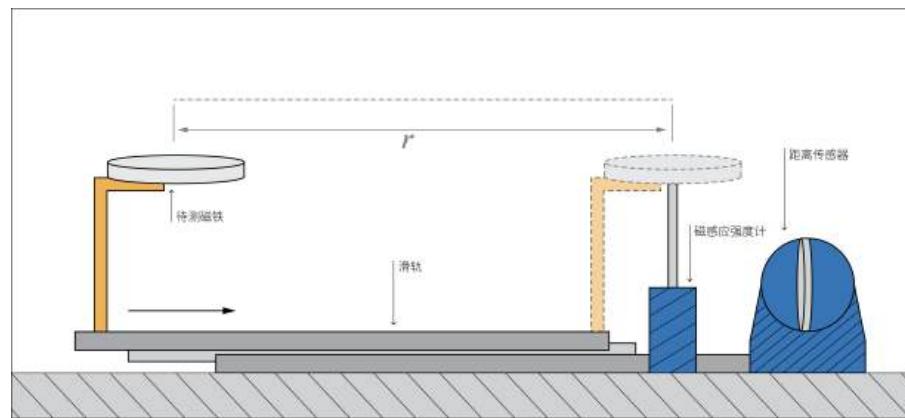
对两侧同时取对数得

$$\ln B = \ln \frac{\mu_0 m_r}{2\pi} - 3 \ln z \quad (40)$$

因为在理论模拟的定量计算中使用(39)式，在计算磁矩时，数据拟合应确保线性回归的斜率为-3。通过拟合直线的截距信息可以计算出轴向和径向的磁矩，我们定义复合磁矩为轴、径向的磁矩的几何平均值。磁矩对数拟合图如图17所示，磁矩测量结果如表3所示。



(a) 测量磁铁轴向磁矩实验装置示意图



(b) 测量磁铁径向磁矩实验装置示意图

图 14 测量磁铁磁矩示意图

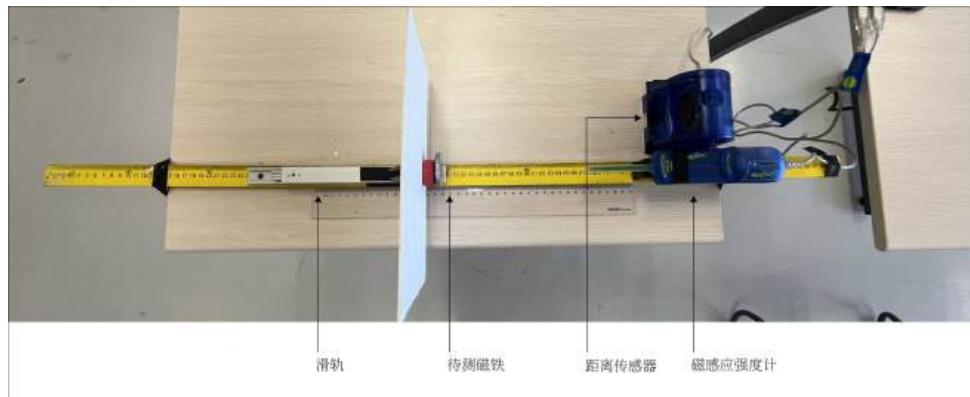


图 15 测量磁矩（轴向）实物图

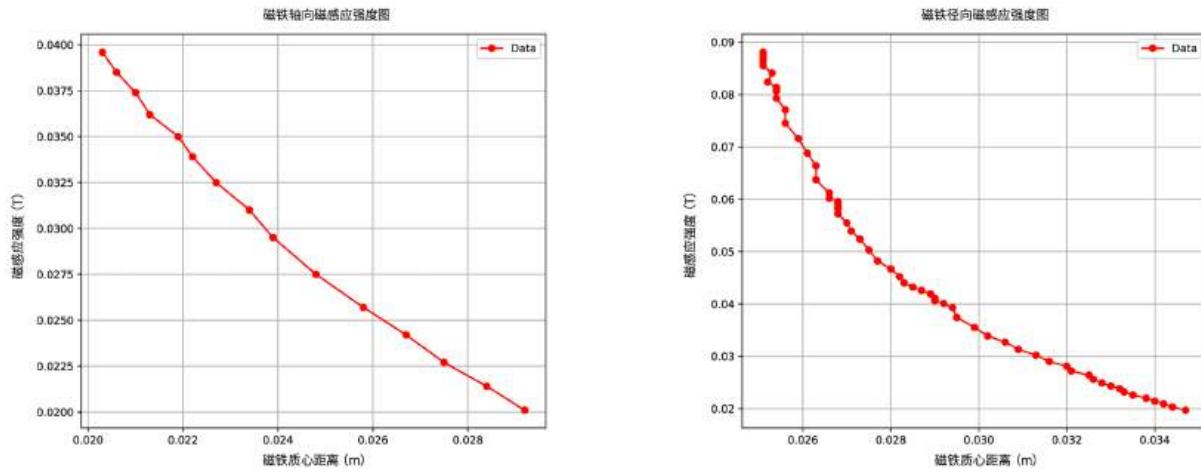


图 16 磁感应强度随距离变化图

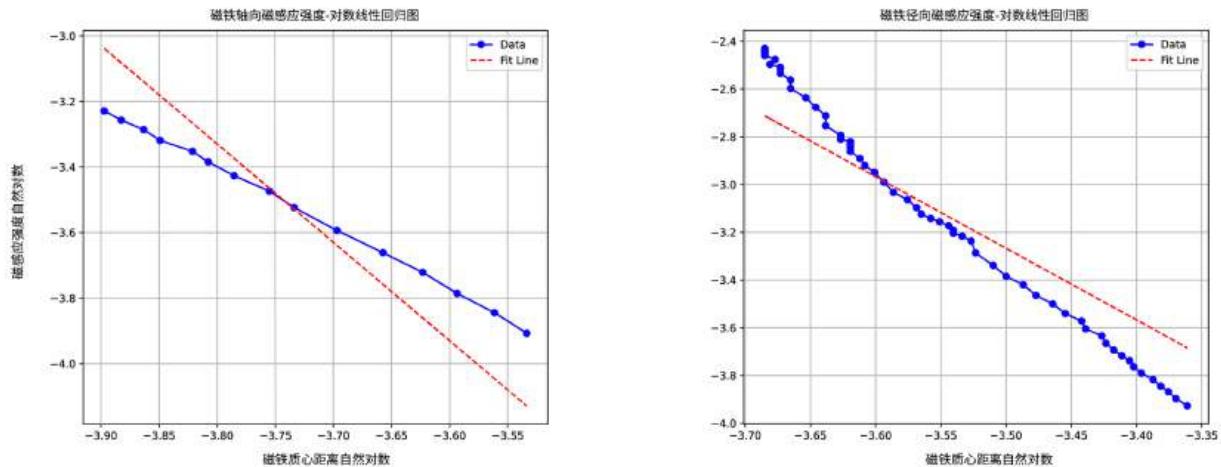


图 17 磁矩对数拟合图

表 3 磁矩实验数据

磁铁型号	测试组	径向磁矩 ($\text{A} \cdot \text{m}^2$)	轴向磁矩 ($\text{A} \cdot \text{m}^2$)	复合磁矩 ($\text{A} \cdot \text{m}^2$)	复合磁矩 ($\text{A} \cdot \text{m}^2$)
转子	1	3.8681	3.4282	3.6415	3.5941
	2	3.6075	3.5230	3.5650	
	3	3.7030	3.4529	3.5758	
浮子中	4	10.5119	2.0070	4.5932	4.6650
	5	10.3264	2.1939	4.7597	
	6	10.1756	2.1178	4.6422	
浮子大	7	16.9074	2.5945	6.6232	6.5474
	8	17.1126	2.6126	6.6864	
	9	15.5856	2.5731	6.3327	

4.2 磁悬浮实验装置

为验证上述理论建模的准确性，我们自主设计、制作了可用于测量所有相关参数的多功能实验设备。实验装置设计图如图18所示，实验装置实物图如图19所示。

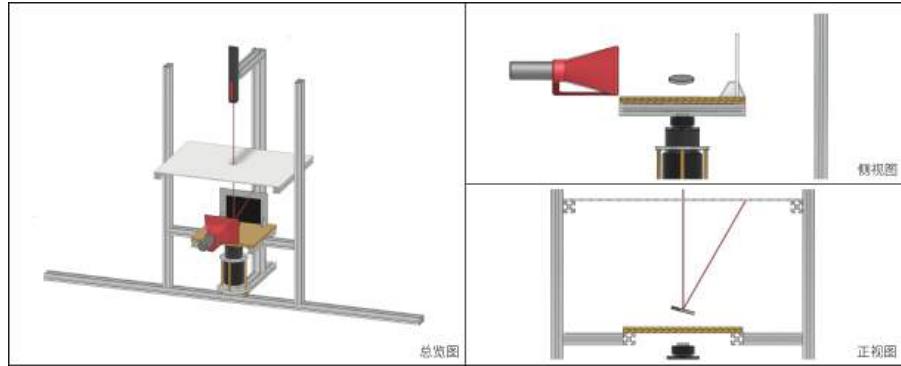


图 18 磁悬浮装置总览：电机系统固定在 T 形连接的铝型材上，铜板固定在两只竖直固定铝型材延伸出的支架上，平行光源发射器固定支架未画出，激光发射器固定在铜板中心点正上方，激光可通过固定在竖直铝型材上的投影板上的洞口到达磁铁表面。



图 19 实验设备实物图

4.2.1 无刷电机闭环测控系统

在实验实践中，转子转速的稳定性至关重要，由于电压不稳、电机负载的变化导致转速的突变可能破坏悬浮的稳定性，并对定量测量产生阻碍。因此实验设备中集成了开源无刷电机矢量变频（FOC, Field-Oriented Control）闭环控制系统 Odrive。使用了 6384-120kv 型号的无刷电机（BLDC）、AS5047P 霍尔传感

器、Odrive3.6 主板和两块 3S 航模锂电池串联驱动，连接示意图如图20所示。这样一来，对 Odrive 编程即可以闭环方式控制电机，且可以通过控制终端获取实时角位置、速度和力矩信息。此外，我们设计了由铝合金 CNC 的电机固定系统，以确保消除由于电机振动对编码器的影响，装置结构如图21所示。

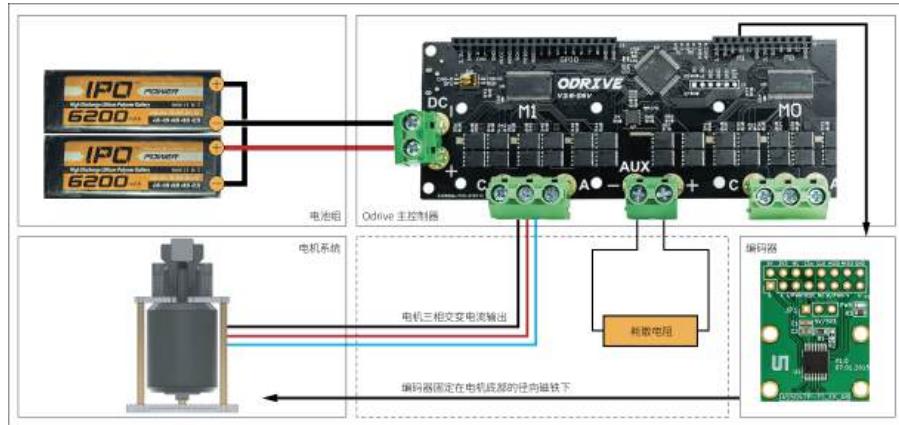


图 20 电路系统示意图

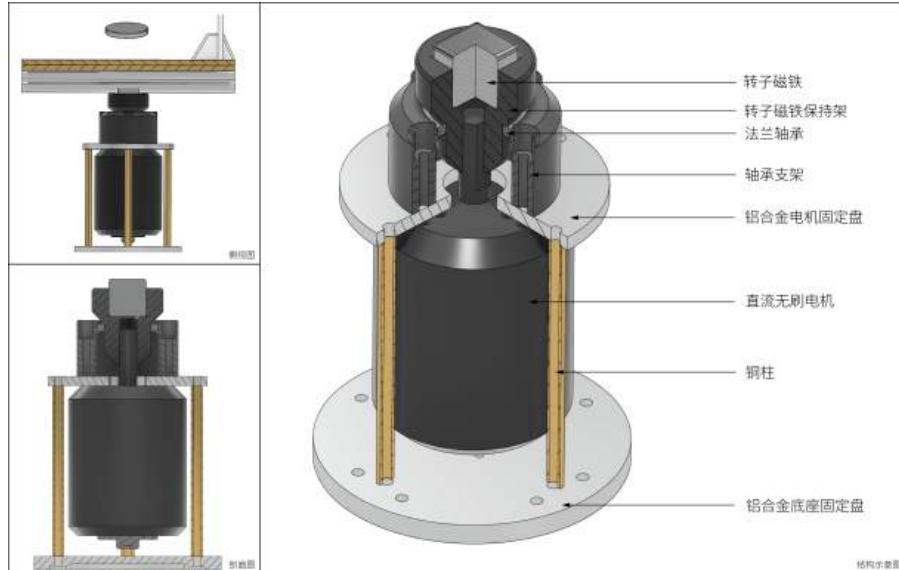


图 21 电机系统示意图

4.3 转子转速与浮子进动速度同步性验证

转子转速和浮子进动速度相等是我们在模型约化中作出的基本假设。同时，转子南北极朝向和浮子进动倾斜方向的对应，我们称之为相位，在理论建模时决定了磁场方向和浮子磁矩方向的关系，具有重要作用。现对转子转速与浮子进动速度同步性给出实验验证。

4.3.1 相位和速度同步性实验

首先验证转子转速和浮子进动速度相等。在两种型号磁铁稳定悬浮时，测量转子转速和浮子进动速度，并计算比值。如图22所示，所有实验组比值均接近于1，证明转子转速和浮子进动速度基本相等。

然后分析转子和浮子的相位的同步性，在转子磁铁侧面标注北极方向，在浮子正反面标注南北极，通过高速影响捕捉到转子南北极位于两侧时浮子状态。如图23所示，转子蓝色一侧为北极，浮子黑色一面为北极，转子北极总是对应着浮子进动的抬升部分。因此，在理论建模中，沿用该真实情景进行分析，见3.2.1节图5。



图 22 转子转速和浮子进动速度关系

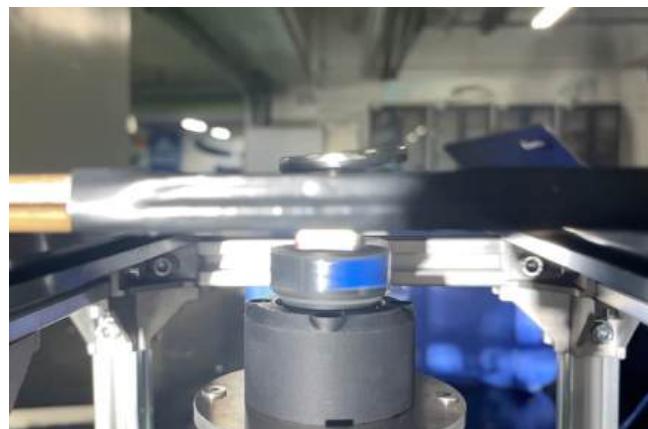


图 23 转子和浮子相位关系

4.4 悬浮高度测定

4.4.1 基于菲涅尔透镜的悬浮高度光学测量

在测定悬浮高度时，采用了通过平行光源使浮子磁铁投影到带有刻度的半透光表面的方式。平行光源的产生是通过手电筒的点光源经过由3D打印外壳固定的菲涅尔透镜使其转换为平行光。实验示意图如图24所示，菲涅尔平行光源结构如图25所示。



图 24 测量系统实物图和视频分析示例

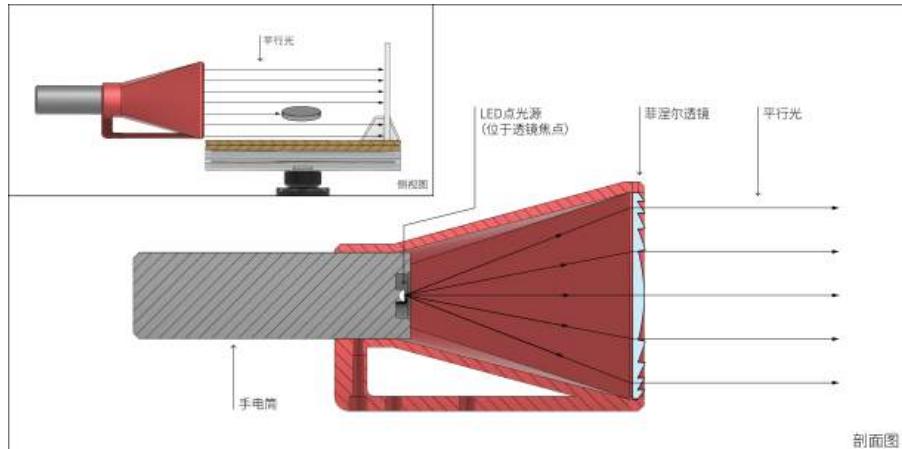


图 25 菲涅尔平行光源结构示意图

4.4.2 悬浮高度数据分析

在每一组转速下，浮子稳定高度悬浮时，使用高速影像在刻度板一侧记录浮子投影。在浮子侧面正对投影板，即阴影面积最小，如图24右下子图所示时，使用 Tracker 等软件读取浮子质心的悬浮高度，重复多次并对测量结果取平均值，经过多组实验，实验结果如图26所示。实验中测量的悬浮高度是转子质心至浮子质心的距离。实验证实了在悬浮区间内，浮子的悬浮高度随转子转速降低而升高。可以看出，大号浮子对数拟合的结果接近理论值，有效地验证了理论模型的准确性，而中号浮子与经过约化的理论模型有一定出入，我们推测这是由于其受理论模型中未考虑的涡流阻尼影响较大。

根据实验观察，随着转子转速的减小，浮子运动逐渐趋向于不稳定。导致此现象的主要原因是磁铁距离铜板的高度逐渐变大，而铜板提供的阻尼作用随距离的增加而减小，因此浮子逐渐无法稳定悬浮。铜板阻尼将在之后深入探讨。

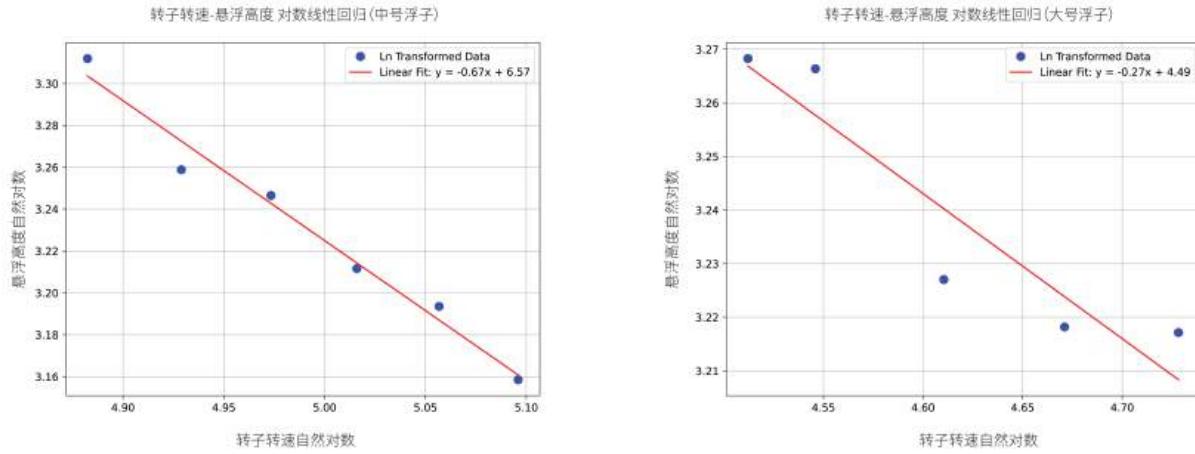


图 26 悬浮高度对数拟合图。(24) 式中理论为 $-\frac{2}{7}$ 次幂, 即-0.285 次幂, 拟合值分别为-0.67, -0.27 次幂

4.5 章动角测定

4.5.1 基于激光的章动角测量系统

章动角测量是实验中较为棘手的一部分。一期实验证明, 磁铁在悬浮时, 虽保持较为稳定的章动角, 但其在 $x - y$ 平面的运动和透视关系使章动角难以从高速镜头中通过图像分析。因此, 我们使用了通过激光束在贴有镜面材料的磁铁表面反射至带有刻度的投影板上的方法。实验原理示意图如图27所示。由于磁铁进动, 激光束反射到投影板上的轨迹近似于一个圆, 如图28所示。使用长曝光照片对激光的轨迹进行捕捉, 通过分析激光轨迹圆的半径即可计算章动角。

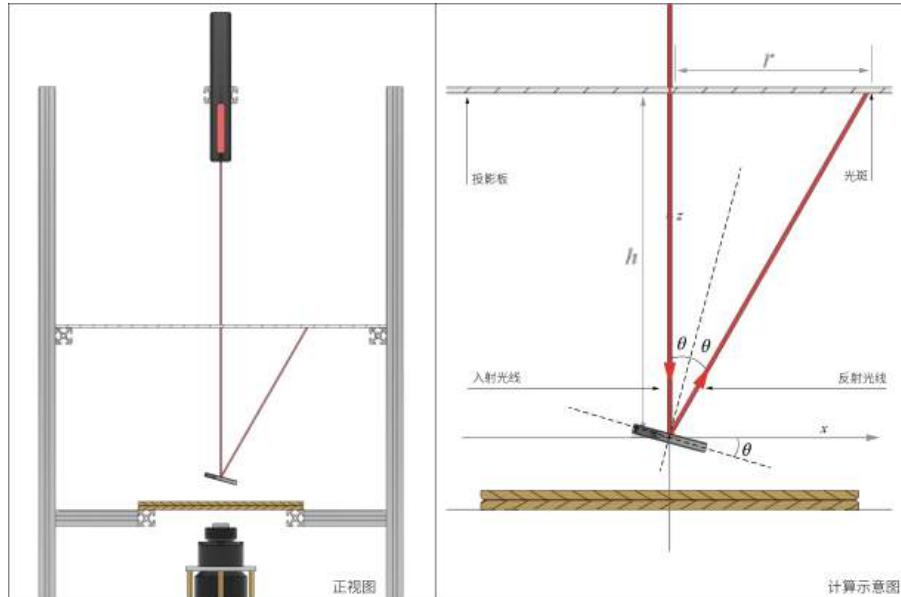


图 27 激光章动角测控系统示意图

4.5.2 章动角分析

在每个固定转速下, 浮子章动角稳定时, 对投影板拍摄多张长曝光照片, 将照片中激光点轨迹近似为圆或椭圆, 对于正圆, 取其半径; 对于椭圆, 取其长、短轴平均值。将激光点轨迹半径取平均值来计算该转速下的章动角数据。实验数据如表4所示, 对数拟合图如图29所示。可以看出, 大号浮子对数拟合的结果接近理论值, 有效地验证了理论模型的准确性, 而中号浮子仍与经过约化的理论模型有一定出入。

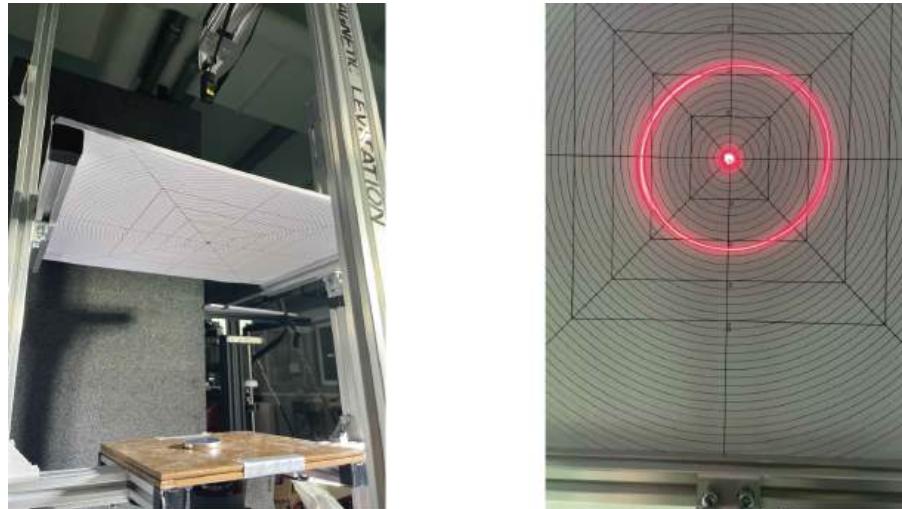
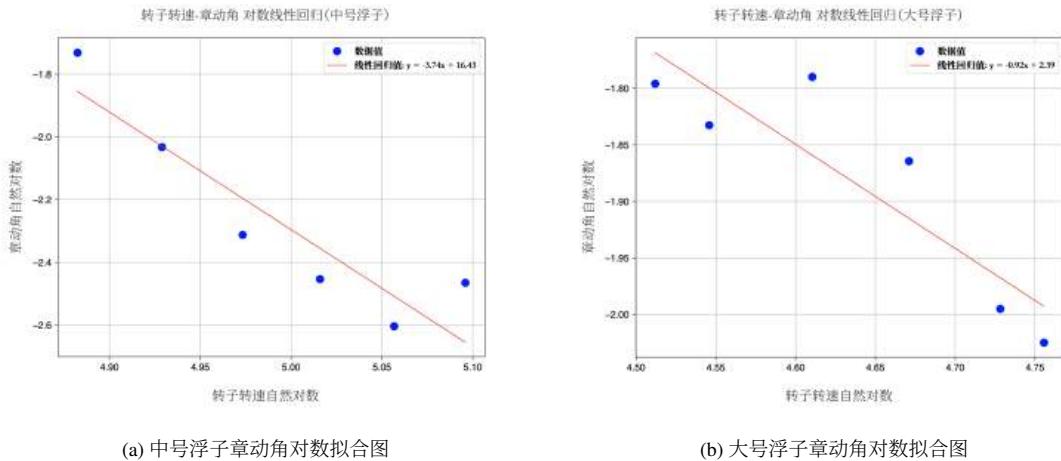


图 28 激光章动角测量系统示实物图

项目	转子转速 (ω)	章动角 (平均值) (θ)
单位	rad/s	rad
中号浮子	131.947	0.177
	138.230	0.131
	144.513	0.099
	150.796	0.086
	157.080	0.074
	163.363	0.085
大号浮子	91.106	0.166
	94.248	0.160
	100.531	0.167
	106.814	0.155
	113.097	0.138
	116.239	0.132

表 4 章动角实验数据：章动角数据为每组转速下重复三次取平均值

图 29 浮子章动角对数拟合图：(25) 式中理论为 $-\frac{8}{7}$ 次幂，即-1.143 次幂，拟合值分别为-3.74, -0.92 次幂

4.6 $x - y$ 平面运动测定

4.6.1 基于高速影像图像分析的 $x - y$ 平面运动测定

在 $x - y$ 平面运动测定中，使用高速摄像机固定在转子磁铁正上方处，在磁铁表面覆盖白色背景，标记黑色中心点和方向箭头。将铜板及其周围覆盖白色纸张以便自动跟踪。

4.6.2 数据分析

在每个固定转速下，浮子 $x - y$ 平面运动较为稳定时，通过记录不同时刻下浮子的 x, y 方向的位置，可以绘制出磁铁悬浮过程的运动轨迹，实验数据如图30(a)所示。实验发现浮子 $x - y$ 平面位移呈现绕以做较慢速圆周运动的点为轴做较快速圆周运动的轨迹，运动幅度较小且有周期性。

通过图30中实验数据与理论模拟数值对比，可以发现其运动轨迹和理论模拟轨迹高度相似，且运动范围大致相同，验证了拉格朗日方程的准确性。

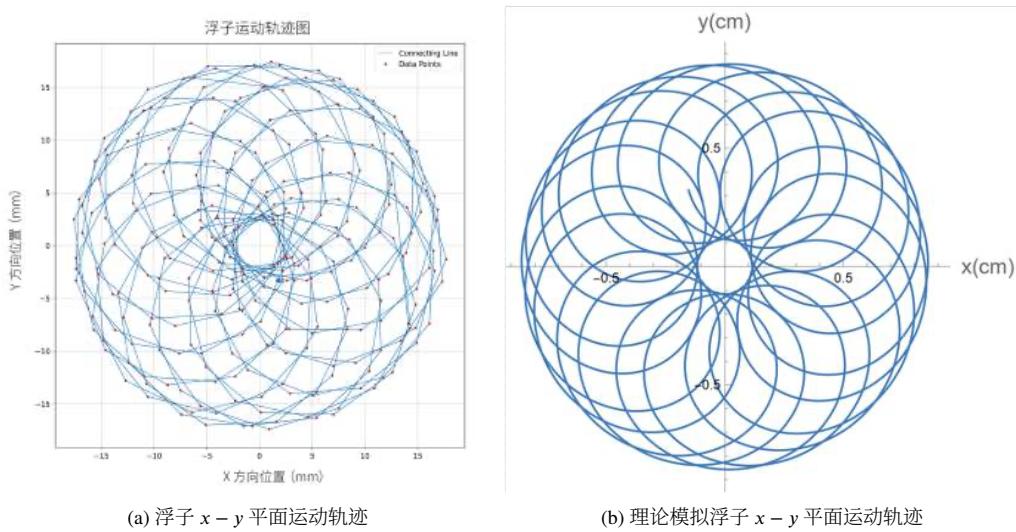


图 30 浮子 $x - y$ 平面运动轨迹与理论模拟对比

4.7 涡流效应

由一期实验可知，铜板中的涡流效应对浮子进动有阻尼作用，在浮子的稳定悬浮中起到关键作用，因此我们对铜板阻尼效应进行测定。

4.7.1 实验装置

通过在铜板表面放置不同厚度的A4纸张我们可测量铜板阻尼随物体到铜板的距离的变化；将磁铁从一定角度的铜板上下滑，磁铁在下滑过程中重力、支持力、铜板提供的阻尼力三力平衡，磁铁做匀速直线运动，磁铁有终端速度 $v_{terminal}$ 。通过改变铜板角度，可以改变终端速度，视频分析测量磁铁的终端速度即可测定铜板阻尼随物体相对运动速度的变化。实验装置如图31、32所示

为了排除摩擦力对实验的干扰，我们通过3D打印机平台覆盖纸张在连接到测力计的磁铁下方匀速拉动，测定了磁铁在纸张表面的滑动摩擦力，实验证明该滑动摩擦力小于传感器最小量程，即0.01N，远小于涡流阻尼力，因此可以忽略摩擦力对实验的干扰。

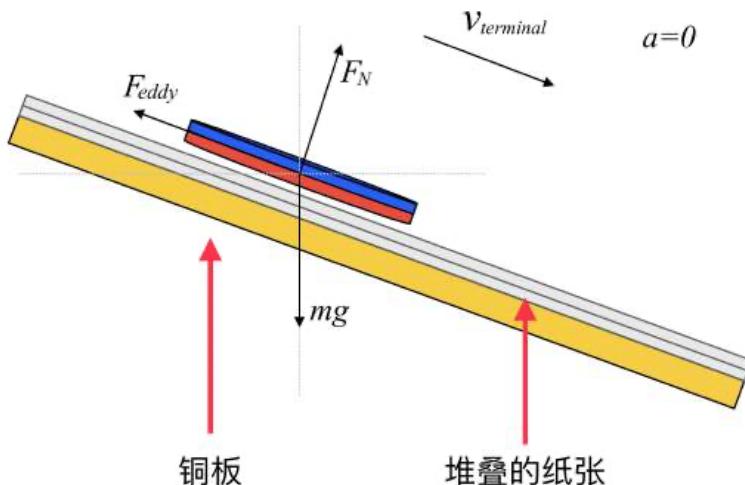


图31 涡流测定装置示意图

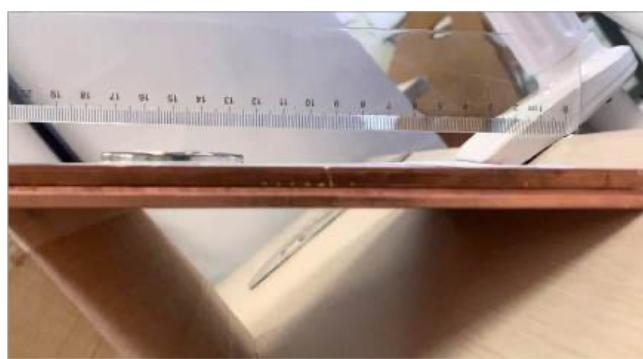


图32 涡流实验装置实物图

4.7.2 实验结果分析

磁铁在下滑过程中的后半段能够达到末端速度，因此在进行视频分析的时候选取下滑的后半段进行测量。实验测试了三组物体到铜板的距离，分别为0mm（在铜板表面放置一张A4纸）、3.45mm、7.5mm。实验数据组图33所示。

图中横坐标代表磁铁下滑过程中达到的末端速度，纵坐标表示铜板提供的阻尼力。实验证明，阻尼力与速度成正比例，且阻尼力随磁铁至铜板距离增大而衰减。

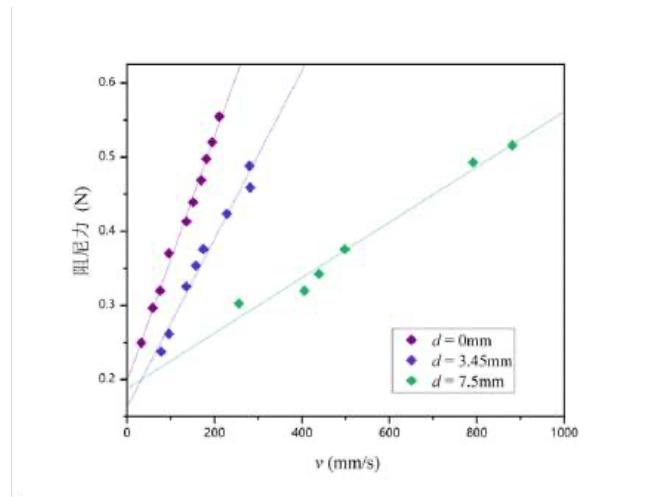


图 33 阻尼实验数据

根据

$$f = \alpha v \quad (41)$$

拟合斜率即为阻尼力系数 α 。实验发现阻尼力系数 α 在磁铁距铜板 3.45mm 之内时为 $10^{-4} N \cdot s/mm$ 量级; 在磁铁距铜板 $3.45\text{mm}-7\text{mm}$ 之内时为 $10^{-5} N \cdot s/mm$ 量级。

4.8 定性解释和物理本质阐释

由于(2)式中陀螺效应和(19)式中磁斥力的存在,浮子得以平衡,其进动角、悬浮高度与进动速度即转子转速呈负相关。在转速过快时,浮子悬浮高度降低,导致其与铜板接触而破坏悬浮稳定性。在转速过慢时,悬浮高度上升,章动角变大,铜板的涡流效应减弱,悬浮稳定性被破坏。当转速稳定在能使铜板提供足够的涡流阻尼而不接触浮子时,浮子得以稳定悬浮。其物理本质是磁斥力使磁铁悬浮,由于陀螺效应,磁力矩使浮子进动而不倾倒。

5 结论与展望

5.1 研究结论

通过多次实验，数据分析以及与理论的对照，我们得以探索该非传统磁悬浮现象的物理本质。通过模型简化和动力学方程的建立，我们从动力学角度定性半定量地分析了磁悬浮的基本条件和相关变量；通过拉格朗日方程完整求解并模拟了运动轨迹；通过对有效势能的进一步分析，我们找到了影响悬浮稳定性的主要原因和稳定悬浮的条件，对其稳定性作了深入、具体的探讨。

实验结果一致指出，在稳定悬浮时，磁铁的悬浮高度、章动角与浮子进动速度呈负相关；在对涡流的研究中，我们证实了涡流对于磁铁悬浮稳定性关键作用，涡流所产生的阻尼力与物体相对运动速度成正比例，与物体和非磁性导电板的距离呈负相关。

最终，该种非传统磁悬浮能够产生的本质原因在于平动上磁斥力与重力二力平衡，转动上磁力矩使转子进动而不倾倒，铜板涡流产生的阻尼力吸收振动从而稳定悬浮。

对于磁悬浮现象动力学：

1. 浮子悬浮高度与转子转速成 $\frac{2}{7}$ 次方反比，随转子转速的增大，悬浮高度下降直至浮子接触铜版无法悬浮；随转子转速的减小，悬浮高度升高直至浮子接距离铜板太远以至其涡流阻尼效应下降而失稳。
2. 浮子章动角与转子转速成 $\frac{8}{7}$ 次方反比，在实验范围内，章动角始终保持在较小角度，即 $\theta \ll 1\text{ rad}$
3. 浮子 $x - y$ 平面运动轨迹受转子转速和磁铁形态影响较大。在一定范围内，随着转子转速增大，浮子的圆周运动轨迹半径也随之增大。
4. 浮子自旋方向与进动方向相反，浮子自旋速度与进动速度几乎相等。

对于磁悬浮的稳定性：

1. 在一定转速范围内，浮子存在一个稳定的悬浮高度，该稳定悬浮高度随转子转速的增大而下降。
2. 在一定转速范围内，浮子存在一个稳定的章动角度。

对于铜版的涡流阻尼效应：

1. 平动上，在磁铁与铜板的距离一定时，铜板的阻尼力大小与磁铁和铜板相对运动速度成正比；在磁铁和铜板相对运动速度一定时，随着磁铁与铜板的距离增大，铜板的阻尼力减小。
2. 转动上，铜板的阻尼力大小随磁铁和铜板相对旋转运动速度增加而增大，定量验证中由于轴承转动阻力过大未能有效测量阻尼力大小。

5.2 未来展望

非传统磁悬浮现象作为传统永磁、电磁磁悬浮的创新和拓展，带给了磁悬浮技术应用新的可能和机遇。我们希望在未来，非传统磁悬浮和相关理论能够在交通运输、货运物流等方面作出贡献。

参考文献

- [1] HERMANSEN J M, DURHUUS F L, FRANDSEN C, et al. Magnetic levitation by rotation[J]. Physical Review Applied, 2023, 20(4):044036.
- [2] UCAR H. Polarity free magnetic repulsion and magnetic bound state[J]. Symmetry, 2021, 13(3):442.
- [3] UCAR H. A note on the stability of the angular motion of a free body with a magnetic moment exposed to a rotating magnetic field[J]. 2023.
- [4] MORIN D. Introduction to classical mechanics: with problems and solutions[M]. [S.I.]: Cambridge University Press, 2008.
- [5] TAYLOR J R, TAYLOR J R. Classical mechanics: volume 1[M]. [S.I.]: Springer, 2005.
- [6] 朗道. 栗弗席兹[J]. 力学, 1959:167-171.

致 谢

1 贡献与分工

在本项目工作过程中（2023.11-2024.9），每位团队成员的主要贡献如下：

陈劲羽：

1. 论文撰写；（2024.8-9）
2. 二期实验实验装置的研发、建模、搭建；实验装置电路系统搭建、机械系统加工和组装；实验方法的提出；（2024.5-6）
3. 二期实验中，磁矩测定、同步性验证、悬浮高度测定、章动角测定、x-y平面运动、涡流效应的实验数据测量、数据分析和呈献；（2024.6-9）
4. 磁悬浮力学理论修正验证；（2024.8-9）
5. 二期实验的实验设备前期调研、方案提出及整合；（2024.5）
6. 一期实验实验设备的3D建模和渲染，组装装配和调试；（2023.11-2024.1）
7. 一期实验中，测量和分析所有数据；（2024.1-3）
8. 竞赛团队队长及相关事务统筹管理；
9. 部分物料自费采购。

范明君：

1. 基础磁悬浮理论提出和理论模拟；（2024.1-3）
2. 一期实验数据采集和分析；（2024.2）
3. 磁悬浮正式实验中提出实验意见；（2024.5）
4. 理论修正过程中的理论支持。（2024.8-9）

季涌泉：

1. 一期实验实验设备的讨论、搭建和采购；（2023.11-2024.1）
2. 一期实验数据采集和分析；（2024.2）
3. 二期实验的实验设备建议提出和讨论；（2024.5）
4. 二期实验实验设备的调试、驱动和错误排除；（2024.6）
5. 二期实验数据分析。（2024.8）

李隆（指导老师）：

1. 论文写作指导；（2024.5-9）
2. 一期实验实验装置审核、实验方法指导、实验数据处理分析指导；（2023.11-2024.3）
3. 二期实验中，磁矩测定、同步性验证、悬浮高度测定、章动角测定、x-y平面运动、涡流效应的实验操作指导和实验方法指导；（2024.6-9）
4. 二期实验过程全程指导、监督；（2024.6-9）
5. 理论修正过程中的理论研究、指导和讨论；（2024.8-9）
6. 部分物料采购。

马驰川（指导老师）：

1. 一期实验实验方法指导；（2023.11-2024.3）
2. 磁悬浮理论建模和理论模拟指导；（2024.1-3）
3. 理论修正过程中的理论指导。（2024.8-9）

致 谢

2 选题和指导老师信息

研究背景：磁悬浮问题是 2024 年青年物理学家锦标赛IYPT题目之一，题目给出了在一大一小的两块磁铁，分别位于非磁性导体板上方和下方时，下方较小磁铁的运动可引发上方较大盘状磁铁的悬浮的情景。我们基于这一情景拓展创新，对该种非传统磁悬浮的实现及其原理进行了广泛而深入的研究。

指导老师与学生关系：

李隆老师：北京市十一学校国际部物理教师

马驰川老师：北京市十一学校国际部物理教师

指导均无偿。

李隆老师在论文写作全过程中提供了指导与审阅支持。

3 解决问题经历

一期实验环节：预实验环节遇到的主要问题是实验装置的调试，搭建装置之后，磁铁无法悬浮。经过一周时间的调试电压、高度等等参数之后，使其可以稳定悬浮，实验因而得以开展。

二期实验环节：在章动角的测量中，我们使用原先的视频分析方法中无法精准地得到章动角信息，这困扰了我们很久。最终，我们改进了装置，使用激光到磁铁表面反射这一创新的方式，间接测量章动角。这一实验效率和精确度上的提升，为实验和理论的对照奠定了基础。

论文撰写环节：由于本篇论文全程使用LaTex编写，我需要学习累LaTex相关语法参数和排版，其中图片的排版令人尤为烦恼，因为LaTex无法精确控制图片的位置，所以我必须通过对每张图片进行微调，来确保他们出现在适当的位置，以增进阅读体验，这一过程也许值得我学习到了使用参数化代码撰写论文的技能，以及对项目整体过程的把握和回顾。

其他困难：在论文撰写的最终环节，我的电脑遇到系统故障无法开机，需要格式化磁盘重装系统，所幸我使用的云端LaTex编辑器没有丢失太多数据，但一部分实验数据损坏。虽然如此，我们没有放弃，在最后的时间追回了丢失的进度，这一困难使我们更加有安全意识和感恩之心。

致 谢

4 致谢

在论文的写作过程中，我们曾经历种种困难，但我们非常幸运得到了很多同学和老师的热心帮助，在此，我们衷心感谢：

1. 北京市十一学校 范爽老师：范爽老师提供了正式实验环节宝贵的实验场地，并提供了3D打印支持。
2. 北京市十一学校 何旭国老师：何旭国老师帮助了我们CNC加工了用于固定正式实验实验设备的铝合金电机固定盘，提供了工程技术支持。
3. 北京师范大学 马宇翰老师：马宇翰老师在理论建模和实验中给予了建设性意见。
4. 北京市十一学校 赵靖邦老师：赵靖邦老师在理论修正中与我们共同讨论了理论，给予了宝贵意见。
5. 北京市十一学校 基雯皓同学：基雯皓在正式实验实验装置搭建过程中中帮助焊接维修了电机编码器，节省了更换和时间成本。
6. 北京市十一学校 水下机器人社团：水下机器人社团成员在我们位于水下机器人实验室实验时借给了我们急需的螺丝和3D打印机等。
7. 北京市十一学校 青年物理学社团：青年物理学社团提供了实验中用到的传感器，其成员在前期参与了项目讨论。

(排名不分先后)

感谢你们对本项目的付出！

2024年9月